# Ajuste de dados de Volatilidade Implícita por meio da parametrização SVI

## 1 Resumo

Esta proposta apresenta a parametrização SVI (de *Stochastic Volatility Inspired*) como alternativa à parametrização por função polinomial quadrática aos dados de volatilidade implícita de ativos financeiros (Dólar, Ibovespa) publicados pela BM&FBovespa.

## 2 Introdução

Até a presente proposta, os dados de volatilidade implícita de ativos financeiros publicados pela BM&FBovespa eram parametrizados por uma função polinomial de segundo grau. As principais limitações apresentadas por esta parametrização são: i) não prever em sua construção qualquer critério de não arbitragem para os parâmetros da função ajustada; ii) não prever uma relação linear entre a respectiva variância e o preço de exercício, $K$, quando $|K| \longrightarrow \infty$; iii) ser relativamente limitada em relação ao ajuste, principalmente para *smiles* mais convexos, como apresentado adiante.

Nesta nota é apresentada como alternativa a parametrização SVI (de *Stochastic Volatility Inspired*), proposta por Gatheral em [1]. Nela os três tópicos mencionados acima são atendidos, para cada *smile* da superfície de volatilidade implícita, e o efeito (no *smile*) da variação de cada parâmetro relativamente intuitivo, como mostrado na próxima seção. Além disso, há correspondência entre a parametrização SVI e o modelo de volatilidade estocástica de Heston para $T \to \infty$, o que promove uma interpretação intuitiva dos parâmetros SVI. Vale lembrar que o modelo de Heston é pautado nos seguintes processos estocásticos para o ativo objeto e para a volatilidade:

$$dS_t = \sqrt{v_t} S_t dW_t, \ \ S_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dZ_t, \ \ \ v_0 \epsilon \mathbb{R}_+^*$$

$$d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt,$$

com $\rho \in \ [-1; 1]$; $\kappa, \theta, \sigma$ e $v_0$ reais positivos com $2\kappa\theta \geq \sigma^2$.

Nas seções a seguir são apresentados em detalhes o modelo e os métodos numéricos adotados para realização do *fit* e para interpolação/extrapolação em cada *smile*.

# 3 Modelo Teórico

Nesta seção são detalhados aspectos técnicos da parametrização bem como métodos para interpolação em cada *smile* e no prazo.

## 3.1 Parametrização SVI

A formulação proposta por Gatheral [1] para a parametrização SVI:

$$var(x) = \sigma_{BS}^2 = a + b\left\{\rho(x-m) + \sqrt{(x-m)^2 + \sigma^2}\right\}, \quad (1)$$

onde $\sigma_{BS}$ é a volatilidade implícita ao modelo de Black-Scholes, $x = \ln(K/F)$, com $K$ sendo o preço de exercício e $F$, o futuro do ativo subjacente. As restrições de validade para esta parametrização são as seguintes [1]:

$$b > 0$$

$$\sigma \geq 0$$

$$\rho \in [-1; 1]$$

Como consequência destas restrições, temos:

$$a \geq -b\sigma\sqrt{1-\rho^2}$$

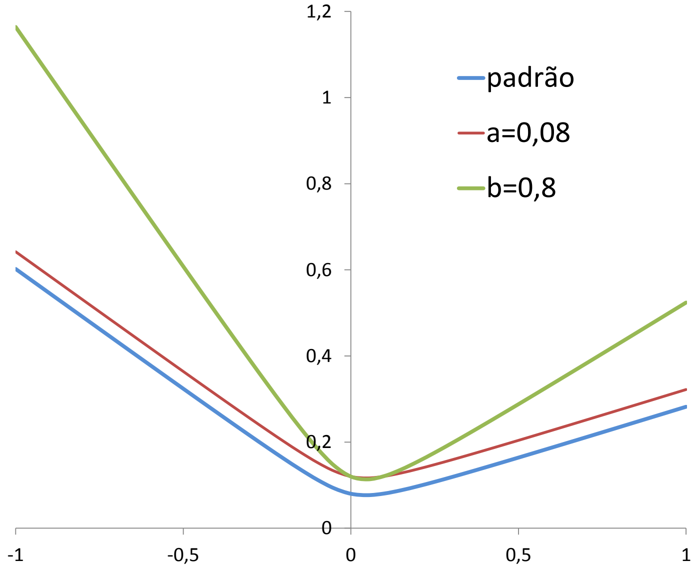
Condição de não arbitragem em cada vencimento (T) para os parâmetros [1]:

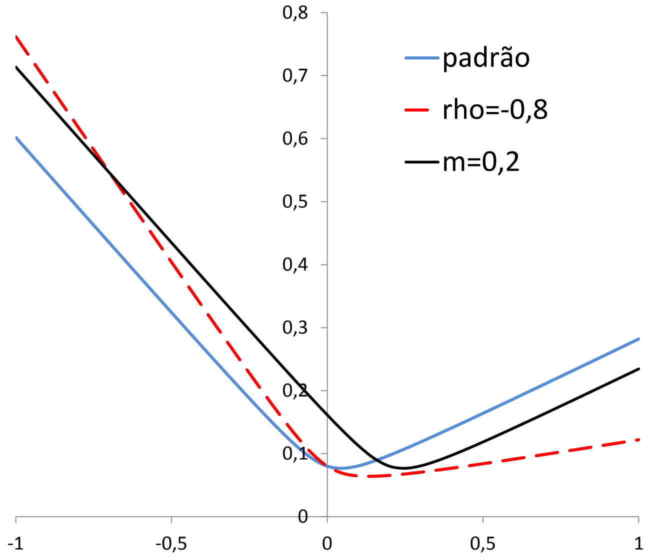
$$b(1 + |\rho|) \leq \frac{4}{T}$$

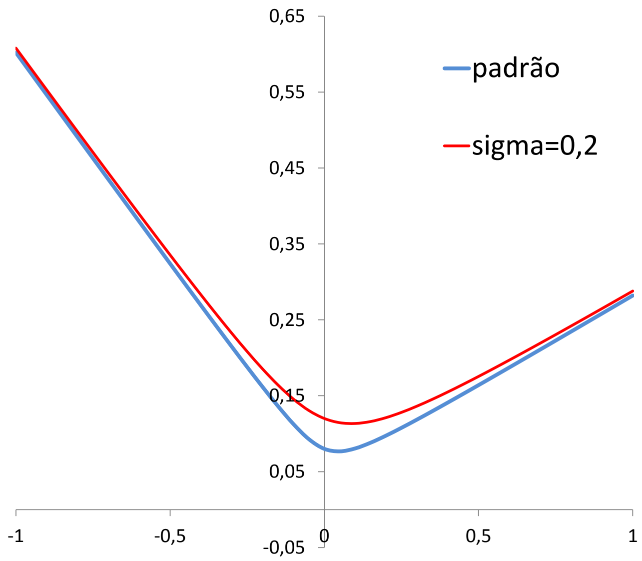
A desigualdade acima é uma consequência da seguinte restrição [2] para a variância total, $var(x)T$, necessária para se garantir não arbitragem em cada vencimento:

$$|T\partial_x var(x)| \leq 4, \ \forall x, \forall T.$$

Para ilustrar o efeito da variação de cada parâmetro no *smile*, são apresentadas a seguir três figuras para as quais a curva considerada padrão possui os seguintes parâmetros: $a = 0{,}04$; $b = 0{,}4$; $\sigma = 0{,}1$; $\rho = 0{,}04$; $m = 0$.


1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
-0,5
0
0,5
1
padrão
a=0,08
b=0,8


0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-1
-0,5
0
0,5
1
padrão
rho=-0,8
m=0,2


0,65
0,55
0,45
0,35
0,25
0,15
0,05
-0,05
-1
-0,5
0
0,5
1
padrão
sigma=0,2

## 3.2 Interpolação/Extrapolação no *Smile*

O objetivo aqui é determinar um valor de $\sigma_{BS}$ por meio da parametrização SVI, dados um valor de Delta e um prazo $T$ arbitrários, onde tomamos como padrão a convenção *delta forward*. Para isso, partimos das seguintes convenções para a taxa *forward* ($F$) e para o prêmio, $V$, de uma opção *vanilla*:

$$F = S_0 e^{(r_1 - r_2)T}$$

$$V = \phi[e^{-r_2 T} S_0 N(\phi d_+) - e^{-r_1 T} K N(\phi d_-)] \quad (2)$$

onde $S_0$ corresponde à taxa spot e as convenções para $r_1$ e $r_2$ dependem do ativo subjacente: por exemplo, no caso de opções sobre dólar, $r_1$ corresponde à taxa de juros doméstica e $r_2$, à taxa de juros *foreign*. $N(y)$ é a normal cumulativa, $\phi = 1$ para uma opção de compra e $\phi = -1$ para uma opção de venda. $K$ é o preço de exercício e $d_\pm$ são dados por:

$$d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r_1 - r_2 \pm \frac{\sigma_{BS}^2}{2})T}{\sigma_{BS}\sqrt{T}},$$

que também pode ser escrito da seguinte forma:

$$d_\pm = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) \pm \frac{\sigma_{BS}^2}{2} T}{\sigma_{BS}\sqrt{T}},$$

com $\sigma_{BS}$ sendo a volatilidade implícita para o *strike* $K$ e prazo $T$. De (1) tem-se que $\ln(F/K) = -x$ e $\sigma_{BS}^2 = var(x)$. Assim, $d_\pm$ pode ser escrito em função de $x$:

$$d_\pm = \frac{-\mathrm{x} \pm \frac{var(x)}{2} T}{\sqrt{var(x).T}}. \quad (3)$$

A partir de (2) e (3), chega-se ao *forward Delta*, que é dado por:

$$\Delta_F = \frac{\partial V}{\partial F} = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial F} = \phi N(\phi d_+). \quad (4)$$

Finalmente, ao se substituir (3) em (4), chegamos à seguinte equação, para uma opção de compra:

$$x - \frac{1}{2} var(x).T - N^{-1}(\Delta_F).\sqrt{var(x).T} = 0, \quad (5)$$

onde $N^{-1}(y)$ é a inversa da normal cumulativa. Assim, dado um valor de $\Delta_F$ e um prazo $T$, o correspondente valor de $\sigma_{BS} = \sqrt{var(x)}$ é obtido através de um método iterativo que determina a raiz da equação (5), no qual são usados os parâmetros $a, b, \rho, m$ e $\sigma$ de (1).

## 3.3 Restrições e Interpolação no Prazo

A interpolação da volatilidade implícita no prazo é realizada através de uma interpolação da variância total $\sigma_{BS}^2 T$, para cada Delta, como apresentado a seguir [3]:

$$\sigma_{BS}(T_j) = \sqrt{\frac{T_j - T_{j-1}}{T_{j+1} - T_{j-1}} \frac{T_{j+1}}{T_j} \sigma_{BS}^2(T_{j+1}) + \frac{T_{j+1} - T_j}{T_{j+1} - T_{j-1}} \frac{T_{j-1}}{T_j} \sigma_{BS}^2(T_{j-1})} \qquad (6)$$

Assumindo-se que os *smiles* nos prazos $T_{j+1}$ e $T_{j-1}$ (com $T_{j+1} > T_j$) respeitam o critério de não arbitragem no tempo, $\frac{dCall}{dT} > 0$, a interpolação por meio da variância total resulta num *smile* que também respeita este critério.

Seguindo esta linha de raciocínio, as restrições no tempo [4] para a parametrização SVI garantem que a variância total seja não decrescente no tempo:

$$a_{j+1} T_{j+1} \geq a_j T_j$$

$$\sigma_{j+1}^2 T_{j+1} \geq \sigma_j^2 T_j$$

$$var_{j+1}^* T_{j+1} \geq var_j^* T_j,$$

onde $var^* = a + b\sigma\sqrt{1-\rho^2}$ . Desta forma, as restrições para os parâmetros obtidos no prazo $T_{j+1}$ dependem dos parâmetros obtidos para o prazo $T_j$.

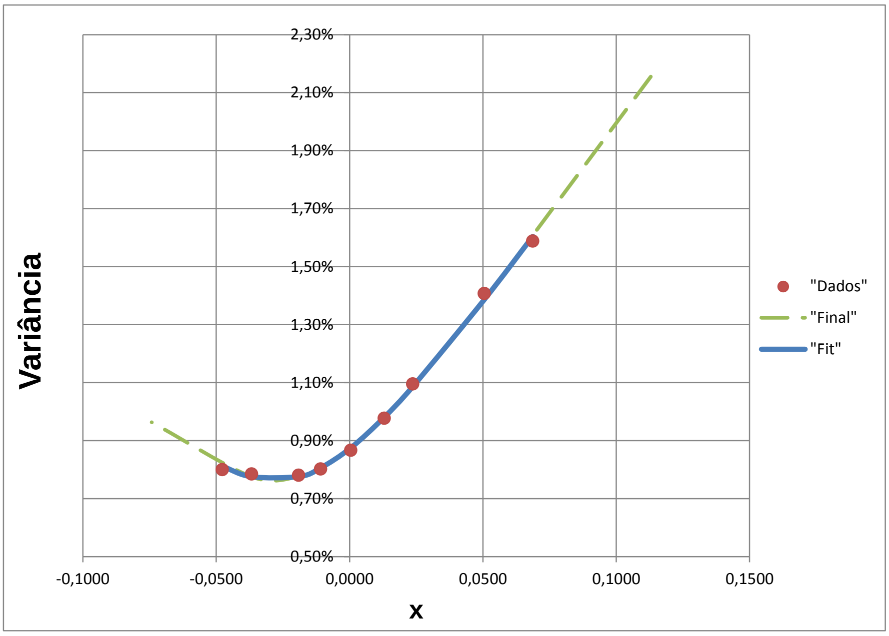
# 4 Implementação de referência

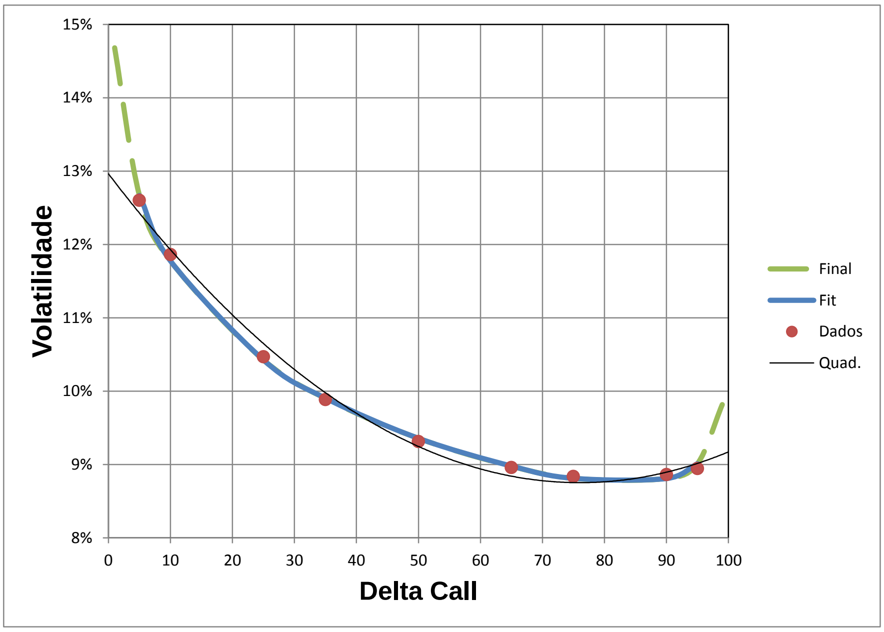
Segue um roteiro com as etapas realizadas na implementação de referência:

1. Recebimento de informações de participantes.
2. Validação absoluta dos dados (ver [6]):
   - Critérios de não arbitragem em cada superfície recebida dos participantes.
3. Validação relativa dos dados (ver [6]):
   - Para cada vértice da superfície informado é realizado um teste-t com os dados dos participantes.
4. Após as validações dos dados, uma média aritmética é realizada sobre os dados validados. Como resultado, obtêm-se uma superfície de volatilidade em *delta* e nos prazos fornecidos pelos participantes.
5. O ajuste para a parametrização do SVI é realizado em cada *smile* da superfície final (média dos dados recebidos). No apêndice é apresentado um método de otimização que pode ser utilizado (seção A.1), um critério para determinar a precisão do otimizador (seção A.2) e um tratamento para um caso particular (seção A.3): quando a variância mínima observada é muito pequena ($\lesssim 10^{-5}$).

# 5 Resultados

A seguir são apresentados dois gráficos relativos ao *fit* de um conjunto de dados de volatilidade implícita de taxa de câmbio. O primeiro apresenta o resultado do *fit* para a variância em função de $x$. O segundo apresenta o mesmo resultado para volatilidade implícita em função do Delta de uma opção de compra. Nele é apresentado também um *fit* com a função polinomial quadrática para comparação. É possível notar visualmente a superioridade do *fit* obtido com a parametrização SVI.




# 6 Referências

[1] J. Gatheral, *A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives*, Global Derivatives and Risk (2004);

[2] L. C. G. Rogers, M. R. Tehranchi, *Can the implied volatility surface move by parallel shifts?*, Finance and Stochastics, 4, 235-248 (2010);

[3] A. Castagna, *The Implied volatility surfaces*, Iason (2007);

[4] S. Gurrieri, *A Class of Term Structures for SVI Implied Volatility*, SSRN (2010), disponível em: http://ssrn.com/abstract=1779463.

[5] Gerência de Apreçamento, *Especificação das superfícies de volatilidade implícita publicadas pela BM&FBovespa*;

[6] Gerência de Apreçamento, *Critérios para construção da Superfície de Volatilidade Implícita*.

# Apêndice

## A.1 Mínimos Quadrados – SVI e o Método de Gauss-Marquard

Nesta seção é descrito brevemente um algoritmo que utiliza o método de Gauss-Marquardt aplicado à parametrização SVI. Cada *smile* é definido por um conjunto de dados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, onde $x$ é definido em (1) e $y$ é a variância obtida a partir da coleta de dados de informantes.

O objetivo do método é minimizar $Q$ dado, em cada passo $i$ do método iterativo, por:

$$Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i) = [\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i)]^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i) = [\boldsymbol{y} - \boldsymbol{var}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i)]^t[\boldsymbol{y} - \boldsymbol{var}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i)], \quad (7)$$

onde $var(x, \boldsymbol{\beta})$ é dado por (1) e $\boldsymbol{\beta}_i$representa o conjunto de parâmetros $\{a, b, \sigma, \rho, m\}$ no passo $i$.

Para isso é necessário variar os parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ de forma a atingir este objetivo. O método de Gauss-Marquardt parte da seguinte expansão em série de Taylor para a função a ser ajustada:

$$var(x, \boldsymbol{\beta}) \cong var(x, \boldsymbol{\beta}') + \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial var(x,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_\nu}(\beta_\nu - \beta'_\nu).$$

Definindo-se $\mathcal{J}$ por:

$$\mathcal{J} = \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{\partial var(x,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_\nu},$$

é possível chegar à seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i + [\mathcal{J}^t\mathcal{J}]^{-1}\mathcal{J}^t\boldsymbol{r}_i(x, \boldsymbol{\beta}_i)\,,$$

que define o método de Gauss. No método de Gauss-Marquardt introduz-se um fator multiplicativo na diagonal principal da matriz produto $[\mathcal{J}^t\mathcal{J}]$:

$$M^\lambda = (\mathbf{1} + \lambda)[\mathcal{J}^t\mathcal{J}],$$

com $\lambda$ sendo uma constante tipicamente positiva. Assim, a iteratividade ocorre sobre a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{\beta}_{i+1} = \boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}_i},$$

com $\Delta\beta_i$ dado por:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}_i} = \left(M^{\lambda}\right)^{-1} \mathcal{J}^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{\beta}_i)$$

Os passos do algoritmo podem ser organizados da seguinte maneira:

1) A partir do conjunto de dados $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ calculam-se $\mathcal{J}(\boldsymbol{\beta}_i)$, $\boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i)$ e, consequentemente, $Q_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_i)$ e $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}_i}$;
2) Verifica-se o enquadramento de $\beta_{i+1}$ em relação às restrições dos parâmetros SVI e calcula-se $\boldsymbol{r}_{i+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_{i+1})$ e, consequentemente, $Q_{i+1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\beta}_{i+1})$;
3) Enquanto $Q_{i+1} > Q_i$, multiplica-se $\lambda$ por um fator $(\alpha)$ arbitrário, tipicamente $\alpha = 10$. Este processo pode ser limitado por um valor arbitrário $\lambda_{Máximo}$ , também arbitrário. Quando $Q_{i+1} < Q_i$, reduz-se o valor de $\lambda$, dividindo-o por $\alpha$, aceita-se o valor de $\beta_{i+1}$ e repete-se todo o processo para este novo conjunto de parâmetros.

O algoritmo é finalizado em duas situações: quando se atinge a precisão desejada ou quando a diferença entre $Q_{i+1}$e $Q_i$ for muito pequena. Geralmente no último caso a convergência não é satisfatória e a solução para o problema se dá fazendo-se uma nova escolha inicial para os parâmetros da função.

## A.2 Critério de Precisão para o Método dos Mínimos Quadrados

A precisão absoluta requerida para a função objetivo, $Q$, da otimização via Método dos Mínimos Quadrados varia de acordo o nível de volatilidade de cada ativo objeto para o qual é o método é aplicado. Sendo assim, se faz necessário estabelecer um critério para determinar uma precisão relativa.

Para facilitar, é adotada como exemplo uma função objetivo unidimensional:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} (y_i - v_i)^2,$$

onde $y_i$ corresponde a um dado, por exemplo de variância, e $v_i$, à função adotada para parametrização dos dados. O objetivo aqui é determinar o valor máximo de $Q$ que se admite para a otimização, $Q_{máx}$ , a partir do conjunto de dados.

Definindo-se o erro máximo, $\varepsilon_{máx}$, dado por:

$$\varepsilon_{máx} = \left|1 - \frac{v_{min}}{y_{min}}\right|,$$

e assumindo-se que todos os valores de $y$ são iguais a $y_{min}$ ,tem-se:

$$Q_{máx} = N\varepsilon_{máx}^2 y_{min}^2$$

Assim, determina-se $Q_{máx}$ a partir de uma escolha arbitrária para $\varepsilon_{máx}$, por exemplo, $\varepsilon_{máx} = 2\%$, e do conjunto de dados: por exemplo, considerando-se um *smile* com 9 valores de volatilidade implícita para os deltas adotados pela BM&FBovespa, cuja volatilidade mínima dentre eles é de 10%, temos então $Q_{máx} = 9.(0{,}02)^2.(0{,}1)^2 = 3{,}6 \times 10^{-5}$.

## A.3 Fator de Escala na parametrização SVI

Quando os valores de variância para um dado *smile* são muito pequenos ($\lesssim 10^{-5}$), a convergência do Método dos Mínimos Quadrados pode ficar comprometida devido à precisão numérica do software utilizado. Isto pode ocorrer, por exemplo, com os primeiros vencimentos de opções sobre IDI (Índice de Taxa Média de Depósitos Interfinanceiros de Um Dia).

Uma possível solução para este problema é criar um fator de escala para estabelecer momentaneamente um nível de volatilidade implícita artificial que viabiliza a utilização deste método. No caso da parametrização SVI, é possível incluir um fator de escala, $\gamma$, da seguinte maneira:

$$\gamma var(x) = \gamma\sigma_{BS}^2 = \gamma a + b\left\{\rho(\gamma x - \gamma m) + \sqrt{(\gamma x - \gamma m)^2 + \gamma^2\sigma^2}\right\}$$

Realiza-se então, a otimização com os dados multiplicados pelo fator de escala, por meio da seguinte equação:

$$var(x)' = \sigma'^2_{BS} = a' + b\left\{\rho(x' - m') + \sqrt{(x' - m')^2 + \sigma'^2}\right\}$$

onde:

$$x' = \gamma x$$

$$var(x)' = \gamma var(x)$$

$$a' = \gamma a$$

$$m' = \gamma m$$

$$\sigma' = \gamma\sigma$$

Depois disto, basta reverter os parâmetros, dividindo-se $a, m$ e $\sigma$ por $\gamma$. Vale observar que neste caso os parâmetros $b$ e $\rho$ são obtidos diretamente, independentemente do fator de escala.

Para determinar o fator de escala, partimos da seguinte igualdade:

$$\gamma v_{min} = v_{padrão},$$

onde $v_{padrão}$ é escolhido arbitrariamente, como por exemplo $v_{padrão} = (10\%)^2$, onde é admitido um nível de volatilidade implícita de $10\%$. Assim, num caso onde a volatilidade mínima observada num dado *smile* é de 0,1%, temos um fator $\gamma = 1 \times 10^4$.