

# Metodologia de ajuste de dados de volatilidade implícita por meio da parametrização SABR (VID e VTF)

Este documento apresenta a metodologia de ajuste de dados de volatilidade implícita para as operações estruturadas de volatilidade de juros *SPOT* (VID) e volatilidade de juros *FORWARD* (VTF). O método usado é o SABR (*Stochastic Alpha Beta Rho*). Na seção 1 é apresentada uma explicação a respeito do que o método se propõe a realizar; na seção 2 é apresentada a fórmula que o método se utiliza e seus parâmetros, assim como a interpolação no *strike*. Na seção 3, é apresentado um exemplo prático a partir dos dados de entrada fornecidos pelo mercado.

## 1 Introdução

O método SABR é aplicado de forma a realizar o ajuste dos dados fornecidos pelo mercado relativos às estratégias VID e VTF de volatilidade por delta e posteriormente é realizada a interpolação entre os dados ajustados de forma a obter a volatilidade para qualquer delta desejado. As volatilidades relativas aos deltas 1, 10, 25, 37, 50, 63, 75, 90 e 99 são então publicadas para o mercado.

## 2 Modelo Teórico

A fórmula usada para a parametrização SABR é a seguinte:

$$\sigma_{BS}(f, K) \approx \frac{\alpha}{(fK)^{\frac{1-\beta}{2}} \left( 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln\left(\frac{f}{K}\right)^2 + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln\left(\frac{f}{K}\right)^4 \right)^{\frac{z}{\alpha}}} \times \left( 1 + \left( \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho\beta v\alpha}{(fK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24} v^2 \right) (T) \right)$$

Onde:

$\sigma_{BS}$ : Volatilidade implícita ao modelo de Black-Scholes.

$K$ : Preço de exercício.

$F$ : O futuro do ativo subjacente.

$$z = \frac{v}{\alpha} (fK)^{\frac{1-\beta}{2}} \ln\left(\frac{f}{K}\right)$$

$$x(z) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{1-2\rho z + z^2}\right) + z - \rho}{1-\rho}\right)$$

As condições iniciais aplicadas sobre os parâmetros do modelo são as seguintes:

$$\beta \in [0; 1]$$

$$\alpha \geq 0$$

$$\rho \in [-1; 1]$$

$$v \geq 0$$

## 2.1 Ajuste dos dados e Interpolação nos deltas.

O método SABR realiza o *fit* das volatilidades nos deltas fornecidos e posteriormente, a interpolação dos dados é feita para os deltas padronizados; torna-se necessário então, realizar o cálculo dos *Strikes* correspondentes a esses deltas, assim sendo, dado um delta padronizado  $\Delta_F$ , temos, para uma opção de compra o seguinte *strike* equivalente:

$$x - F e^{-N^{-1}(\Delta_F)\sqrt{\text{var}(x)T + \frac{\text{var}(x)T}{2}}} = 0$$

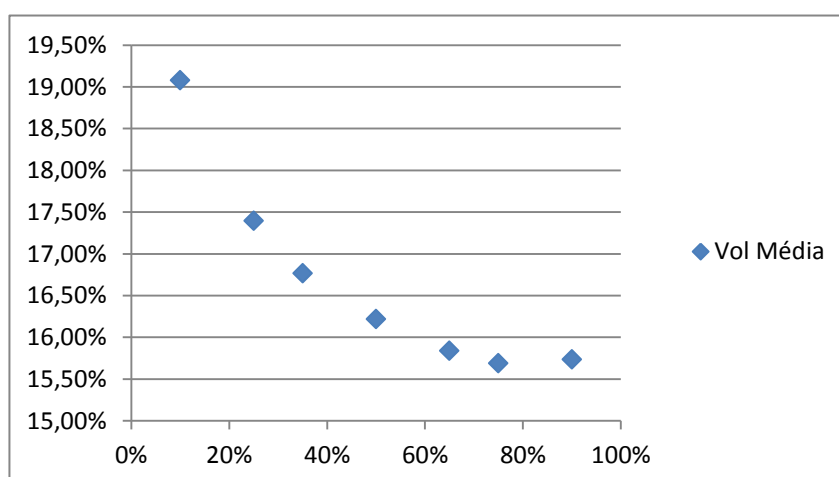
Onde  $x$  é o *strike* e  $N^{-1}(y)$  é a inversa da normal cumulativa. Assim, dado um valor de  $\Delta_F$  e um prazo  $T$ , o correspondente valor de  $\sigma_{BS} = \sqrt{\text{var}(x)}$  é obtido através de um método iterativo que determina a raiz da equação acima, no qual são usados os parâmetros  $\alpha, \beta, \rho$  e  $v$  do modelo .

## 3 Exemplo Prático

Suponha que as volatilidades para a estratégia VTF de um determinado dia sejam fornecidas para um determinado vencimento conforme a tabela abaixo e o respectivo gráfico:

Tabela 1: Volatilidades obtidas junto aos informantes do mercado.

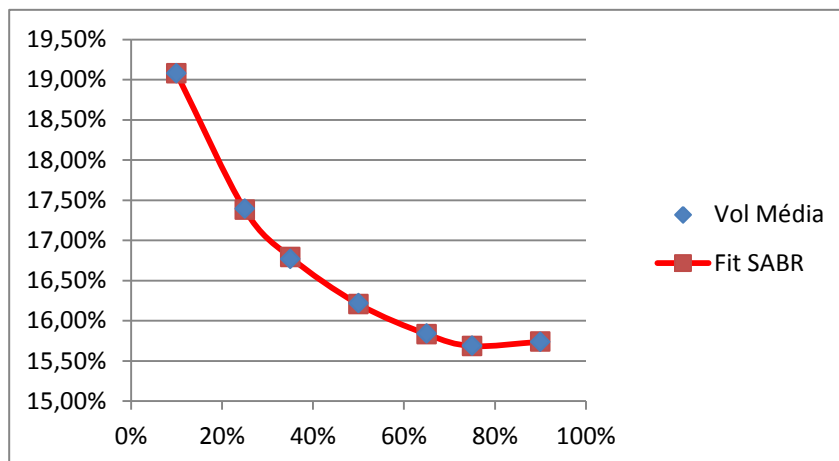
Delta	jan-15
10%	19,08%
25%	17,39%
35%	16,77%
50%	16,22%
65%	15,84%
75%	15,69%
90%	15,74%



O ajuste dos dados pelo modelo SABR, resulta na seguinte tabela e gráfico:

Tabela 2: Volatilidades resultantes da aplicação do modelo SABR sobre as volatilidades fornecidas pelos informantes do mercado.

Delta	jan-15
10%	19,08%
25%	17,38%
35%	16,79%
50%	16,21%
65%	15,83%
75%	15,69%
90%	15,74%



O ajuste de dados foi feito com os seguintes parâmetros do modelo calculados através de otimização:

$$\beta = 0,28$$

$$\alpha = 0,53$$

$$\rho = 0,16$$

$$v = 1,00$$

Uma vez realizado o ajuste de dados, é efetuada a interpolação dos dados para os deltas 1, 10, 25, 37, 50, 63, 75, 90 e 99, resultando nos seguintes valores:

Tabela 3: Volatilidades resultantes da interpolação dos dados obtidos pela aplicação do modelo SABR.

Delta	jan-15
1%	23,03%
10%	19,08%
25%	17,38%
37%	16,67%
50%	16,21%
63%	15,89%
75%	15,69%
90%	15,74%
99%	16,82%

